

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020
(ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 76.

A2. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 104.

A3. α) Ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

β) Η αιτιολόγηση γίνεται με την συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A4. α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\}$

• $x \in \mathbb{R}$ και

• $e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ αφού η e^x είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε $A_{f \circ g} = (0, +\infty)$.

Ο τύπος της $f \circ g$ είναι $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$.

B2. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$ έχουμε

$\frac{e^{x_1} + 2}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 2}{e^{x_2} - 1} \Leftrightarrow (e^{x_1} + 2) \cdot (e^{x_2} - 1) = (e^{x_1} - 1) \cdot (e^{x_2} + 2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Άρα η $f \circ g$ είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Βρίσκουμε την αντίστροφη της $f \circ g$ λύνοντας την εξίσωση $(f \circ g)(x) = \psi$ ως προς x .

$$(f \circ g)(x) = \psi \Leftrightarrow \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \psi \stackrel{\psi > 0}{\Leftrightarrow} e^x + 2 = \psi \cdot e^x - \psi \Leftrightarrow \psi \cdot e^x - e^x = \psi + 2 \Leftrightarrow e^x \cdot (\psi - 1) = \psi + 2 \Leftrightarrow e^x = \frac{\psi + 2}{\psi - 1},$$

$\psi \neq 1$.

Άρα $x = \ln \frac{\psi + 2}{\psi - 1}$ με $\frac{\psi + 2}{\psi - 1} > 0 \Leftrightarrow \psi > 1$. Άρα ο τύπος της αντίστροφης είναι $(f \circ g)^{-1}(x) = \ln \left(\frac{x + 2}{x - 1} \right)$, $x > 1$.

B3. $\varphi(x) = \ln \left(\frac{x + 2}{x - 1} \right)$, $x > 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020
(ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $\varphi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \dots = \frac{-3}{(x+2)(x-1)} < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Άρα η φ είναι γν. φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

B4. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left(\frac{x+2}{x-1}\right)$. Θέτουμε $u = \frac{x+2}{x-1}$. Για $x \rightarrow 1^+$ έχουμε $u \rightarrow +\infty$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+2}{x-1}\right)$. Θέτουμε $u = \frac{x+2}{x-1}$. $x \rightarrow +\infty$ έχουμε $u \rightarrow 1$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής οπότε είναι συνεχής και στο $x=0$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln x\right) = 1 - \ln 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x + \lambda \sigma\upsilon\nu x) = \lambda$$

$$\text{Οπότε είναι } 1 - \ln 1 = \lambda \Leftrightarrow \ln 1 + \lambda - 1 = 0$$

$$\text{Θεωρούμε } g(\lambda) = \ln \lambda + \lambda - 1, \lambda > 0$$

Προφανής ρίζα $\lambda=1$ αφού $g(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$ και $g'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 1 > 0$ για κάθε $\lambda > 0$.

Οπότε g γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Άρα $\lambda=1$ είναι μοναδική ρίζα.

Γ2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1 - 1 + x}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1-x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

Άρα $f'(0)=1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020
(ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

Οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, 1)$ είναι $\lambda_{\epsilon\varphi}=f'(0)=1$ δηλαδή $\epsilon\varphi=1$ όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$ άρα $\hat{\omega} = \frac{\pi}{4}$.

Γ3. Κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος του πεδίου ορισμού όπου η f' μηδενίζεται ή η f' δεν ορίζεται.

$$\text{Για } x < 0: f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$\text{Για } 0 < x < \frac{3\pi}{2}: f'(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \text{ και } f'(0)=1.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$ οπότε τα μοναδικά κρίσιμα σημεία είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$.

$$\text{Για } x < 0: f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = 0 \text{ ΑΔΥΝΑΤΗ.}$$

$$0 < x < \frac{3\pi}{2}: f'(x) = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \Leftrightarrow \epsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \text{ ή} \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{αφού } 0 < x < \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{Οπότε τα κρίσιμα σημεία της } f \text{ είναι } x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}.$$

Γ4. $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha \leq 0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(\alpha, f(\alpha))$ έχει τύπο

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

$$y - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{+1}{(1-\alpha)^2}(x - \alpha) \text{ η οποία τέμνει τον } x'x \text{ όταν } y=0$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{+1}{(1-\alpha)^2}x - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \Leftrightarrow (1-\alpha)(-1) = +x - \alpha$$

$$-1 + \alpha = +x - \alpha$$

$$\boxed{x = 2\alpha - 1}$$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης της C_f στο M με τον $x'x$ είναι $B(2\alpha - 1, 0)$.

$$\text{Όταν το } M \text{ κινείται στην } C_f \text{ έχουμε } M(\alpha(t)), f(\alpha(t)) \text{ με } \alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου B είναι

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020
(ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

$$x_B'(t) = (2a(t)) - 1)' = 2a'(t) = 2 \frac{-a(t)}{3} = -\frac{2a(t)}{3}$$

Την χρονική στιγμή t_0 $x_B'(t_0) = -\frac{2(-1)}{3} = \frac{2}{3} \frac{\text{μον.μήκους}}{\text{μον.χρόνου}}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = e^x + x^2 - e^x - 1$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) = e^x + 2x - e$ και $f''(x) = e^x + 2$.

Αφού $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f' είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με $f'(0) \cdot f'(1) = 2(1 - e) < 0$ σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ και αφού η f' είναι γν. αύξουσα το x_0 είναι μοναδικό.

Για $x < x_0$: $f'(x) < f'(x_0) = 0$

Για $x > x_0$: $f'(x) > f'(x_0) = 0$

Άρα στο x_0 η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e x_0 - 1$ (1)

Έχουμε $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$ (2)

Άρα (1), (2) προκύπτει $f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - e x_0 - 1 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$

Δ2. Για κάθε $x \neq x_0$ ισχύουν

• $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ και αφού $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$,

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$

• $\eta\mu \frac{1}{x - x_0} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \frac{1}{x - x_0} \geq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \right) = +\infty$

Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \frac{1}{x - x_0} \right] = +\infty$

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in [x_0, 1]$.

• Η h συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

• $h(x_0) = f(x_0) < 0$ αφού $x_0 < 1$ και f γν. αύξουσα στο $[x_0, 1]$

τότε $f(x_0) < f(1) = 0$

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020
(ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**

και $h(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$

Οπότε $h(x_0)h(1)<0$.

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)+x=x_0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(x_0, 1)$.

Επειδή $h'(x)=f'(x)+1>0$ για κάθε $x \in [x_0, 1]$ τότε h γν. αύξουσα στο $[x_0, 1]$ και άρα η εξίσωση $f(x)+x=x_0$ έχει μοναδική ρίζα ρ στο $(x_0, 1)$.

Δ4. Για κάθε $\kappa \in (\rho, 1)$ θα αποδείξουμε ότι

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa)+1) \Leftrightarrow f(x_0) > f(\rho) f'(\kappa) + f(\rho) \Leftrightarrow f(x_0) - f(\rho) > f(\rho) f'(\kappa)$$

Η f συνεχής $[x_0, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ) οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον $\xi \in (x_0, \rho): f'(\xi) = \frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}$.

Έχουμε $x_0 < \xi < \rho < \kappa < 1$ και αφού f γν. αύξουσα, τότε

$$f'(\xi) < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa) \xLeftrightarrow{f(\rho)=x_0-\rho<0}$$

$$f(x_0) - f(\rho) > f(\rho) \cdot f'(\kappa)$$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

**ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β. - ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β.
– ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.**

www.floropoulos.gr